Joseph Louis François Bertrand, né le 11 mars 1822 à Paris au 52 rue Saint-André-des-Arts, et mort le 3 avril 1900 à Paris, est un mathématicien, économiste et historien des sciences français.
En 1845, en analysant une table de nombres premiers jusqu'à 6 000 000, il fait la conjecture qu'il y a toujours au moins un nombre premier entre n et 2n-2 pour tout n plus grand que 3. Pafnouti Tchebychev a démontré cette conjecture, le postulat de Bertrand, en 1850.
Pour l'étude de la convergence des series numériques, il mit au point un critère de comparaison plus fin que le critère de Riemann.
En sciences économiques, il s'est intéressé au problème de duopole (deux entreprises offreuses font face à une infinité de demandeurs).

Prop.7: Pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ fixé, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge ssi $\begin{cases}\alpha>1 \text{ ou}\\ \alpha=1 \text{ et } \beta>1\end{cases}$.(Monier p.237)

Exemple: Etudier la cv de la série de terme général $(n+1)^{1/n}-n^{1/(n+1)}$ (Monier Ex.3.2.1 p.245, z)

I. Outils

- règle $n^\alpha u_n$
- série harmonique, comparaison par majoration
- comparaison série-intégrale.

II. Développement

A. Démonstration de la proposition.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On s'intéresse à la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$

Si α>1, en notant $\gamma=\frac{1+\alpha}{2}$, i.e. γ est le "milieu" du segment [1;α]. On a:

$$n^\gamma\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}=n^{\frac{1-\alpha}{2}}(\ln n)^{-\beta}\xrightarrow[n\infty]{}0$$

Donc, d'après la "règle $n^\alpha u_n$", la série étudiée converge.

Si α<1, comme $n\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}=n^{1-\alpha}(\ln n)^{-\beta}\xrightarrow[n\infty]{}+\infty$, il existe un rang à partir duquel $\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}\geq\frac{1}{n}$, donc la série étudiée diverge.

Supposons α=1, nous allons utiliser une **comparaison série-intégrale** (1).

En étudiant sa dérivée $-\left(\frac{\ln x+\beta\geq 0}{x^2(\ln x)^{\beta+1}\geq 0}\right)\leq 0$, on constate que la fonction $x\mapsto\frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ décroît au voisinage de $+\infty$.

Donc il existe $N\geq 3$ tel que:

$$\forall n\geq N,\int_N^{n+1}\frac{1}{x(\ln x)^\beta}dx\leq\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^\beta}\leq\int_{N-1}^{n}\frac{1}{x(\ln x)^\beta}.dx$$

→**Si β>1**, alors pour tout n tel que $n\geq N$: en posant y=ln(x)

$$\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^\beta}\leq\int_{N-1}^{n}\frac{1}{x(\ln x)^\beta}.dx=\int_{\ln(N-1)}^{\ln n}\frac{dy}{y^\beta}=\frac{(\ln(N-1))^{1-\beta}-(\ln n)^{1-\beta}}{\beta-1}\leq\frac{(\ln(N-1))^{1-\beta}}{\beta-1}$$

Ainsi la suite des sommes partielles (qui est croissante: série à termes≥0) est majorée, donc converge. D'après la Prop.1, la série de Bertrand converge.

→**Si β=1**, alors pour tout n tel que $n \geq N$:

$$\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k \ln k} \leq \int_{N-1}^{n} \frac{1}{x \ln x}.dx = \int_{\ln(N-1)}^{\ln n} \frac{dy}{y} = \ln\left(\ln(n+1)\right) - \ln\left(\ln(N)\right) \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$$

Donc $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

→**Si β<1**, alors comme $\frac{1}{n\left(\ln n\right)^{\beta}} \geq \frac{1}{n \ln n}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\left(\ln n\right)^{\beta}}$ diverge.

B. Correction de l'exemple.

Etudions la cv de la série de terme général $\left(n+1\right)^{1/n} - n^{1/(n+1)}$

On cherche un **équivalent** du terme général:

$$\left(n+1\right)^{1/n} - n^{1/(n+1)} = \exp\left(\ln\left(\left(n+1\right)^{1/n}\right)\right) - \exp\left(\ln\left(n^{1/(n+1)}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(n+1\right)\right) - \exp\left(\frac{1}{n+1}\ln\left(n\right)\right) = e^{\frac{1}{n}\ln(n+1)} - e^{\frac{1}{n+1}\ln(n)} = e^{\frac{1}{n}\ln\left(n\frac{n+1}{n}\right)} - e^{\frac{1}{n+1}\ln(n)} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} + e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - e^{\frac{1}{n+1}\ln(n)}$$

$$= e^{\frac{\ln n}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - e^{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\ln n}\right) = e^{\frac{\ln n}{n}}\left(e^{\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - e^{-\frac{\ln n}{n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$$

D'où la convergence de la série, par équivalence avec la série de Bertrand α=2; β=-1.

III. Notes

(1)**Comparaison série-intégrale**: Cas général (Monier 3.3.7 p.266)

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application <u>continue par morceaux et décroissante</u>.

On a, pour tout $\left(p, q\right) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_0 \leq p < q$:

$$\int_{p+1}^{q+1} f \leq \sum_{k=p+1}^{q} f\left(k\right) \leq \int_{p}^{q} f$$